

Zestaw 0. PRZELICZANIE JEDNOSTEK, DZIAŁANIA NA WEKTORACH

I. Pomoce

1. Przedrostki wielokrotności i podwielokrotności jednostek miar

Przedrostek	Znaczenie	Zapis skrócony	Oznaczenie
tera	1 000 000 000 000	10^{12}	T
giga	1 000 000 000	10^9	G
mega	1 000 000	10^6	M
kilo	1 000	10^3	k
hekto	100	10^2	h
deka	10	10^1	da
decy	0,1	10^{-1}	d
centy	0,01	10^{-2}	c
mili	0,001	10^{-3}	m
mikro	0,000 001	10^{-6}	μ
nano	0,000 000 001	10^{-9}	n
piko	0,000 000 000 001	10^{-12}	p
femto	0,000 000 000 000 001	10^{-15}	f
atto	0,000 000 000 000 000 001	10^{-18}	a

2. Jednostki podstawowe i pomocnicze układu SI

Nazwa	Jednostka	Wielkość fizyczna
metr	m	długość
kilogram	kg	masa
sekunda	s	czas
amper	A	natężenie prądu elektrycznego
kelwin	K	temperatura
kandela	cd	światłość
mol	mol	liczność materii

Nazwa	Jednostka	Wielkość fizyczna	Definicja
radian	rad	kat płaski	radian - kąt między dwoma promieniami okręgu wycinającymi z tego okręgu łuk o długości równej promieniowi.
steradian	sr	kąt przestrzenny	steradian - kąt bryłowy o wierzchołku w środku sfery, wycinający na powierzchni sfery obszar o polu równym kwadratowi promienia tej sfery.

3. Wartości funkcji trygonometrycznych dla wybranych kątów

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos \alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje
$\operatorname{ctg} \alpha$	nie istnieje	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0

II. WPROWADZENIE

1) **Wektor** – obiekt posiadający punkt zaczepienia (początek), moduł (długość), kierunek (prosta, na której wektor leży) i zwrot (określa orientację wzdłuż danego kierunku).

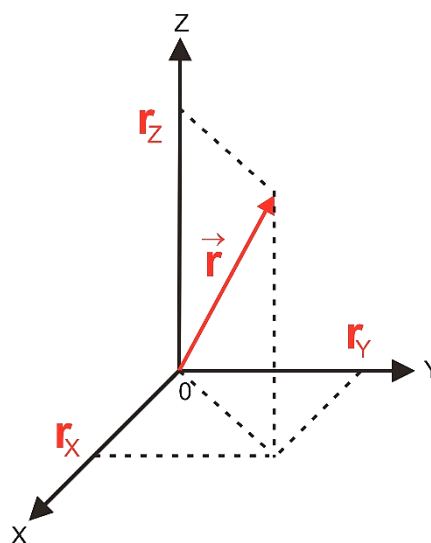
2) Rozkładanie wektorów na składowe

$$\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y + \vec{r}_z$$

$$\vec{r}_x = (r_x, 0, 0)$$

$$\vec{r}_y = (0, r_y, 0)$$

$$\vec{r}_z = (0, 0, r_z)$$



Zapis:

$$\vec{r} = r_x \hat{i} + r_y \hat{j} + r_z \hat{k}$$

Gdzie: $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ – wektory jednostkowe (wersory) osi X, Y, Z.

Długość wektora: $|\vec{r}| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}$

3) Suma i różnica wektorów

a) Działania na współrzędnych

Dane są wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ o współrzędnych:

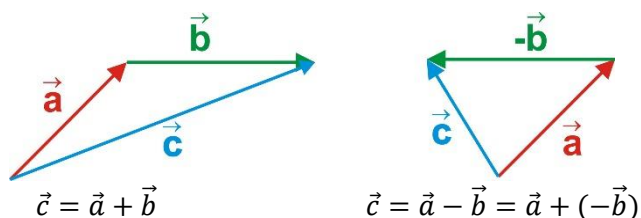
$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) \quad \vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$$

$$\vec{c} = \vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$$

$$\vec{c} = (a_x \pm b_x)\hat{i} + (a_y \pm b_y)\hat{j} + (a_z \pm b_z)\hat{k}$$

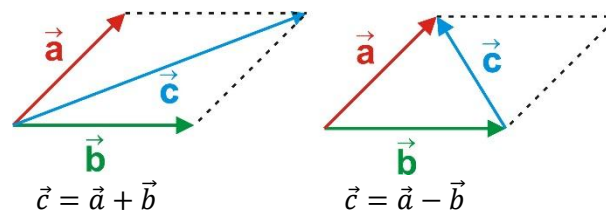
b) Dodawanie i odejmowanie graficzne

Metoda trójkąta:



- Początek wektora $\vec{a}$ umieszczamy w punkcie zaczepienia (jeżeli jest podany) lub w początku układu współrzędnych, pamiętamy o zachowaniu zwrotu i długości;
- Początek wektora $\vec{b}$ umieszczamy na końcu wektora $\vec{a}$, pamiętamy o zachowaniu zwrotu i długości;
- Łączymy początek wektora $\vec{a}$ i koniec wektora $\vec{b}$, powstały wektor $\vec{c}$ stanowi sumę tych wektorów;
- Odejmowanie wektora $\vec{b}$ od wektora $\vec{a}$ jest równoważne z dodawaniem wektora odwrotnego $-\vec{b}$ do wektora $\vec{a}$;
- Metoda wieloboku – analogiczna do metody trójkąta, pozwala na dodawanie większej liczby wektorów.

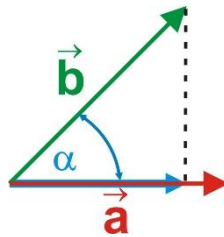
Metoda równoległoboku:



- Wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ zaczepiamy we wspólnym początku, pamiętamy o zachowaniu zwrotu i długości;
- Przez koniec wektora $\vec{a}$ prowadzimy prostą równoległą do wektora $\vec{b}$;
- Przez koniec wektora $\vec{b}$ prowadzimy prostą równoległą do wektora $\vec{a}$;
- Dłuższa przekątna równoległoboku to suma wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$, krótsza to różnica wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

4) Iloczyn skalarny

- Mnożenie długości wektora $\vec{a}$ przez długość wektora ($\vec{b}'$) będącego rzutem wektora $\vec{b}$ na wektor $\vec{a}$;
- $|\vec{b}'| = |\vec{b}| \cos \alpha$;
- Kolejność mnożenia nie ma znaczenia.

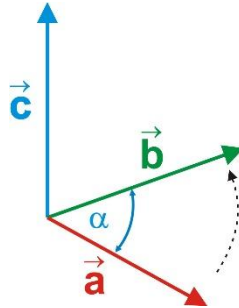


$$c = \vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha = (a_x \cdot b_x) + (a_y \cdot b_y) + (a_z \cdot b_z)$$

- Wynik mnożenia skalarnego wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ to liczba c (skalar);
- Gdy $\vec{a} \perp \vec{b}$ iloczyn skalarny jest równy 0 ($\alpha: 90^\circ, 270^\circ$ itd.);
- Wartość iloczynu skalarnego osiąga wartość maksymalną dla wektorów równoległych ($\alpha: 0^\circ, 360^\circ$ itd.);
- Wartość iloczynu skalarnego osiąga wartość minimalną dla wektorów antyrównoległych ($\alpha: 180^\circ$ itd.).

5) Iloczyn wektorowy

- Kolejność mnożenia ma znaczenie!!!
- Stosujemy regułę prawej dłoni: zataczamy łuk palcami prawej dłoni zgodnie z kierunkiem mnożenia (np. mnożąc $\vec{a}$ przez $\vec{b}$ zataczamy łuk w kierunku od wektora $\vec{a}$ do $\vec{b}$), wyciągnięty kciuk wskazuje kierunek wektora będącego iloczynem wektorowym wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$.



Współrzędne wektora $\vec{c}$:

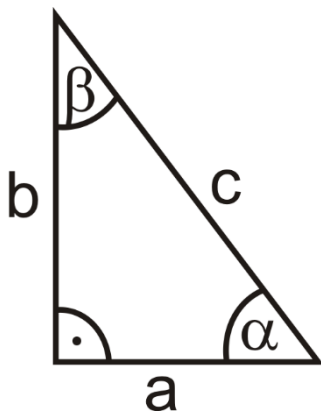
$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)\hat{i} - (a_x b_z - a_z b_x)\hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{k} = c_x \hat{i} + c_y \hat{j} + c_z \hat{k}$$

Długość wektora $\vec{c}$:

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha$$

- Wynik mnożenia wektorowego wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ to wektor $\vec{c}$ o długości $|\vec{c}|$;
- Gdy $\vec{a} \parallel \vec{b}$ iloczyn wektorowy jest równy 0 ($\alpha: 0^\circ, 180^\circ, 360^\circ$ itd.);
- Gdy $\vec{a} \perp \vec{b}$ iloczyn wektorowy osiąga maksimum ($\alpha: 90^\circ, 270^\circ$ itd.).

6) Podstawowe funkcje trygonometryczne



$$\sin \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\tan \alpha = \frac{b}{a}$$

$$\cot \alpha = \frac{a}{b}$$